

Modelación matemática para optimizar el diseño de las redes del muestreo de exploración y explotación en yacimientos lateríticos de Ni y Co

Ramón Eddie Peña-Abreu ⁽¹⁾

⁽¹⁾ *Centro de Investigaciones del Níquel, Carretera Yagrumaje km 5 ½ Moa. Holguín. CP:83330 Fax: 53 24 62202, Teléf: 024-67123, 024-67976, rpena@cil.moa.minbas.cu.*

Recibido: febrero 27, 2015	Acceptado: diciembre 15, 2015
----------------------------	-------------------------------

Resumen

La eficiencia en los procesos extractivos de Ni y Co a partir de lateritas depende de la estabilidad en la calidad de las menas, la cual radica en la información que se logra en la exploración. Las investigaciones para aumentar la eficiencia de las redes del muestreo de exploración y explotación no enfocaron de forma integral su modelación y se ha propuesto como objetivo formular los modelos matemáticos que permitan optimizar dichas redes en los yacimientos lateríticos cubanos de Ni y Co. Para ello se desarrolló un nuevo sistema de modelos matemáticos que maximizan en dichas redes la relación de la cantidad de sondeos con el aporte de información. Este incluye un nuevo modelo matemático de yacimientos que se soporta en una nueva clasificación sustancial multivariada y se fundamenta en Cadenas de Markov y no es paramétrico. Se probó optimizando la red en un bloque del yacimiento Punta Gorda.

Palabras clave: modelación matemática, optimización, procesos aleatorios, redes de exploración y prospección

Mathematical modeling to optimize exploration and exploitation nets sampling design in Ni and Co laterites ore deposits

Abstract

Nickel and Cobalt extractive efficiency processes from lateritic stability depends on ore quality, taking into account the information obtained from exploration. Research carried out to increase network efficiency sampling exploration and exploitation did not focus its modeling as integral module for that reason its principal objective is set to formulate mathematical models to optimize these networks in Cuban Ni and Co lateritic deposits. In order to reach its goal, it was developed a new mathematical model system in such networks to maximize the surveys number ratio with inlet information. It includes a new Ore body mathematical model supported on substantial new multivariate classification and is based on Markov chains and is nonparametric. It was also tested an ore body block from Punta Gorda Nickel Plant optimizing the network.

Keywords: network exploration, sampling, optimization, mathematical modeling

1. Introducción

La importancia de las redes del muestreo en la exploración y la explotación (RMEE) de yacimientos es crucial para un buen desenvolvimiento en la planificación minera y en el proceso industrial (Vera, 2001; Peña y Legra 2005). Los trabajos desarrollados no se orientaron a optimizar las RMEE, en ellos se utilizó un enfoque de modelación que se resume de la forma siguiente:

en un yacimiento, para adquirir un grado de conocimiento E_k (etapa k de la red), se exige que el porcentaje P_k de los bloques o paneles i , de lado L_k , tengan un error ε_i menor que el ε_k permitido por una norma o la condición que se exija para la variable que define la red (Ni o Fe en los YLOC).

A este enfoque en el diseño de redes de muestreo se le ha denominado *clásico* o *restringido*, teniendo en cuenta que es el único utilizado hasta el momento y que limita la modelación, pues asume fijos a la mayor parte de los parámetros. Restringe a formas poligonales el diseño de la red de muestreo; el error (ε_i) no forma parte de las variables y se establece constante, al igual que la cantidad de etapas (t) para la densificación de la red; utilizan modelos univariados en un contexto multivariado y un mismo método geomatemático en los dominios geológicos, en una zona o para todo un yacimiento. Estos aspectos no permiten *optimizar* y sólo logra *racionalizar* las RMEE. La diferencia entre estos dos términos es que la optimización de un objeto se expresa en una función denominada objetivo cuyo dominio de solución es el conjunto de soluciones factibles. Los valores óptimos son aquellos que minimizan o maximizan a la función objetivo en dicho conjunto. Si en el modelado no se incluyen las variables fundamentales en la función objetivo y/o se restringe el conjunto de soluciones factibles, obviando aspectos que describen el objeto, entonces se obtiene un modelo racionalizado y su solución es una *racionalización* del objetivo que se busca (Peña, 1998 y 2005).

En la optimización de las redes de muestreo en los yacimientos lateríticos del oriente cubano (YLOC) se ha racionalizado bajo concepciones económicas o técnicas que innecesariamente se incluyen como restricciones a la modelación matemática (Vera, 2001; Cuador, 2002 y 2003; Boucher, Dimitrakopoulos y Vargas, 2005). En el modelado de las RMEE esta racionalización disminuye la eficiencia en su diseño e impiden alcanzar la máxima información del yacimiento, lo que acarrea una serie de problemas desde el proceso minero hasta el metalúrgico y favorecen la dilución, las pérdidas y el empobrecimiento, el incumplimiento en el volumen y la calidad de las menas y el uso inadecuado del equipamiento de extracción. Todo esto provoca afectaciones al medio ambiente e ineficiencias que redundan en baja rentabilidad económica en la explotación de los YLOC (Legrá, 1999; Arderí y García, 2003; Fernández, Mariño y Reynosa, 2007; Fernández y Mariño, 2009).

El problema que se enfrenta *es la ausencia de una modelación matemática integral en la optimización de las redes de muestreo de los yacimientos lateríticos de Ni y Co del oriente cubano, que corrija las insuficiencias de los modelos actuales para el diseño de las redes del muestreo de exploración y explotación.* Por ello se ha propuesto como **objetivo formular los modelos matemáticos para el diseño de las RMEE en los yacimientos lateríticos que permitan optimizar la adquisición de información.** Se plantea como hipótesis que, *si se obtiene un modelo matemático que integre la información del yacimiento y se optimiza la relación entre el aporte de información con el número de pozos en cada secuencia de sondeos, entonces se optimiza el diseño de la red de muestreo del yacimiento.*

De lo anterior se deriva que es necesario clasificar el comportamiento sustancial de los yacimientos lateríticos, formular el modelo de yacimiento fundamentado en la clasificación sustancial obtenida, formular el modelo de optimización de las RMEE utilizando el modelo de yacimiento, con el objetivo de maximizar la relación entre el aporte de información y el número de pozos.

2. Materiales y métodos

Para el diseño óptimo de las redes de muestreo no es suficiente estimar una variable ya que la información necesaria para los procesos metalúrgicos es multivariada. Una forma de modelación multivariada de los yacimientos se logra clasificando los comportamientos sustanciales, en Peña y Vera (2013) se introdujo una metodología para obtener dicha clasificación, con la cual se obtuvieron once clases de los yacimientos Punta Gorda (PTG), Yagrumaje Norte (YN) y Yagrumaje Sur (YS) (en lo adelante “los tres yacimientos”) que serán utilizadas para el desarrollo de los modelos de optimización de las RMEE.

Las clases se diferencian en sentido multivariado las tipologías de contenidos sustanciales, son mutuamente excluyentes, la suma de los comportamientos de cada clase es el comportamiento global del yacimiento, la unión de todas las clases contiene el comportamiento global del yacimiento, a cada muestra de las RMEE del yacimiento le

corresponde una y sólo una clase patrón (Peña y Vera, 2013). Cada muestra es independiente de las otras y constituye una *realización elemental* que genera un *suceso elemental* con la manifestación de una clase en una muestra.

Se denotará con c_i cada clase del conjunto T de todas las clases. A cada evento consistente en la ocurrencia de la clase i en un punto del yacimiento, se denotará con A_i , donde $i = \overline{1, n}$ y n es el cardinal del conjunto T ($n = |T|$). Se denota con A el conjunto de eventos ($A_i \in A$). Se verifica que: la unión ($\cup_i A_i$) de todos los eventos coincide con el conjunto A ($A = \cup_i A_i$); los eventos son mutuamente excluyentes ($A_i \cap_{i \neq j} A_j, \forall A_i, A_j \in A$), de lo que se deduce que existe el complemento de cada $A_i \in A$ y coincide con el evento imposible $\bar{A}_i = A_i \cap_{i \neq j} A_j = \emptyset; \forall A_i \in A$; a cada evento ($A_i \in A$), se le asocia su frecuencia $p_i \in (0; 1)$ de ocurrencia en el yacimiento.

Con esas cuatro propiedades se completa la construcción axiomática de A como espacio de eventos ya que A constituye un σ -álgebra (Kolmogorov et al, 1956, 1982; Projorov y Rozanov, 1973) y el espacio probabilístico $(A, \Omega(A), P)$, donde $\Omega(A)$ es el conjunto de todas las combinaciones posibles de los elementos de A y P las probabilidades de los elementos de $\Omega(A)$. Teniendo en cuenta que el comportamiento de las clases c_i no siempre es normal, para el análisis de su distribución espacial se asume un modelo *no paramétrico*.

En Wilson (2004) se detalla la complejidad de la meteorización y Lavaut (1987, 2003) en sus estudios sobre las ofiolitas de Cuba oriental demuestra que depende de la fisuración *tectónica* de las rocas madres y del microclima de la localidad, aclara que la tendencia de ese proceso sobre las ultramafitas es única para cada yacimiento, con marcadas disimilitudes dentro de una misma región. A conclusiones similares arriban otros autores que analizan la influencia de las condiciones microclimáticas y del basamento en la formación de los yacimientos de intemperismo (De Vettler, 1955; Rodríguez et al, 1987; Llorca, 1993; De Dios y Díaz, 2003; Gleeson et al, 2004, Freyssinet, 2005; Bergues, 2006; Proenza et al, 2007 y 2010). De estos trabajos se ha deducido que en los YLOC existe un marcado carácter local y anisotrópico del comportamiento espacial y de las propiedades fundamentales del producto residual de la meteorización.

En consideración a lo explicado sobre el carácter local de las propiedades en los YLOC, se asume que para una dirección específica la probabilidad de ocurrencia de la clase $c_i \in A$ en un punto i , depende sólo de que ocurra la clase $c_j \in A$ en el punto precedente j . Si se estudia sobre una red de exploración, j e i constituyen nodos de la red y representan puntos del yacimiento. En un mismo sondeo, en la dirección vertical, la distancia entre nodos la determina la longitud de los testigos extraídos de la perforación y la cantidad de intervalos muestreados entre ellos. En las direcciones horizontales la distancia depende del espaciado de la red en cada dirección específica, en los YLOC se utilizan redes cuadradas. El cambio de la clase c_i en el nodo i a la c_j en el nodo j se considera un cambio de estado, donde se asume al conjunto A como el conjunto de los estados posibles para cada punto del yacimiento.

Se modelan las transiciones de estados con cadenas de Markov, que consisten en una matriz $\pi(k)$ de probabilidades condicionales p_{ij} entre el estado A_i en el punto *origen* y el A_j en el punto *destino* en k pasos, a esto se le denomina *matriz de transferencia* y se construye una para cada dirección y para cada intervalo de profundidad del yacimiento de acuerdo a la discretización del espacio por planos, para discretizar en la horizontal se toman las divisiones de la rosa náutica y el plano vertical en seis secciones. Forman un modelo multimatricial cuya estructura algebraica se expone en el anexo A y garantiza la georeferenciación. Para cada combinación de clases existe una distribución de probabilidad condicional a lo largo del paso correspondiente a cada dirección (i, j), en el intervalo (ξ), lo que genera matrices funcionales que se transforman (Berger, 2010) y se obtiene el modelo multimatricial optimizado:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \phi^{1,1,\xi}(t) & \dots & \phi^{1,u,\xi}(t) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \phi^{v,1,\xi}(t) & \dots & \phi^{v,u,\xi}(t) \end{pmatrix} \quad (1)$$

Una entidad algebraica idéntica a (1) contiene la georeferenciación:

$$g(t, r) = \begin{pmatrix} g_{1,1,\xi}(t, r(\varphi, \theta, \rho)) & \dots & g_{1,u,\xi}(t, r(\varphi, \theta, \rho)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{v,1,\xi}(t, r(\varphi, \theta, \rho)) & \dots & g_{v,u,\xi}(t, r(\varphi, \theta, \rho)) \end{pmatrix} \quad (2)$$

El modelo de yacimiento se expresa en:

$$X(t, r) = \Phi(t) \circ g(t, r) \quad (3)$$

2.1. Modelo para la optimización de las redes de exploración

La estrategia de modelado se formaliza matemáticamente de la siguiente forma: *dado el objeto O del cual se tienen en el momento t un número finito de propiedades (P_k, k ∈ ℤ⁺), con su correspondiente nivel de conocimiento (l_k) forman el par (P_k, l_k) que representa un nivel F(t) de conocimiento de O. Maximizar el conocimiento de O en el momento t significa optimizar la relación funcional F(t) = Φ(l₁, l₂, l₃, ..., l_k, k, t), donde l_k y P_k se relacionan funcionalmente l_k = l_k(P_k). Maximizar el conocimiento de O, significa optimizar la serie funcional S = S(F(t^ς)), ς ∈ ℤ⁺. Cuando O es un yacimiento, optimizar el funcional F(t) implica optimizar la topología, el error, el número de las etapas y el aproximador entre puntos del yacimiento puede ser optimizado en este proceso. En la optimización de las RMEE se busca disminuir la cantidad de sondeos y aumentar la información que aporta cada pozo.*

Con la entropía se mide la información que aportan los sondeos en cada dirección de la etapa t (Shannon, 1948):

$$h^{i,j,\xi}(t) = -\phi^{i,j,\xi}(t) \cdot \log \phi^{i,j,\xi}(t) \quad (4)$$

El objetivo es minimizar el número de sondeos y maximizar la información entre dos etapas de exploración (t, t + Δt), si N^{i,j,ξ}(t) es el número de sondeos realizados en cada dirección i, j hasta la etapa t, se deduce la relación (5).

$$\frac{\Delta h^{i,j,\xi}}{\Delta N^{i,j,\xi}} = \frac{h^{i,j,\xi}(|\phi^{i,j,\xi}(t + \Delta t) - \phi^{i,j,\xi}(t)|)}{N^{i,j,\xi}(t + \Delta t) - N^{i,j,\xi}(t)} \quad (5)$$

Esta relación aplicada al modelo (1) genera el funcional (6).

$$\Delta H(\Phi(t)) = \begin{pmatrix} \frac{\Delta h^{1,1,\xi}(t)}{\Delta N^{1,1,\xi}(t)} & \dots & \frac{\Delta h^{1,u,\xi}(t)}{\Delta N^{1,u,\xi}(t)} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\Delta h^{v,1,\xi}(t)}{\Delta N^{v,1,\xi}(t)} & \dots & \frac{\Delta h^{v,u,\xi}(t)}{\Delta N^{v,u,\xi}(t)} \end{pmatrix} \quad (6)$$

El funcional (6) se aplica en la expresión (3) y se obtiene (7):

$$\mathcal{F}(X(t, r), t) = \Delta H(\Phi(t)) \circ g(t, r) \quad (7);$$

que constituye el *funcional objetivo* para la optimización de las RMEE.

$$\mathcal{F}(X(t, r), t) \rightarrow \text{máx.} \quad (8)$$

La delimitación geográfica del área explorada se modela en la ecuación (8).

$$R(t, r) \leq 0 \quad (9) \text{ y } R(t, r) = g(t, r) - \Psi(t, r)$$

Donde Ψ(t, r) contiene las delimitaciones de la zona. Otras propiedades asociadas a la georeferenciación se añaden a la optimización con la restricción (10).

$$C(t, r) \circ R(t, r) = B^0 \quad (10)$$

Donde C(t, r) serán las propiedades y B⁰ las exigencias a esas propiedades. En caso necesario la restricción (10) puede ser una inequación. Las entidades Ψ(t, r), C(t, r), R(t, r) y B⁰ poseen la estructura de (158) y (2), la operación del producto entre estas entidades "o" se expone en el anexo A.

Las expresiones (8) - (10) constituyen el **modelo de optimización de las RMEE**. El optimiza la topología, el error de cada parámetro definido y el número de las etapas. Se enmarca en los problemas de "programación matemática" para los que existen métodos analíticos y numéricos de solución (Sujariev, 1986, Bajvalov et al, 1987).

Según (6) el núcleo de $\mathcal{F}(X(t, r), t)$ es el variacional $\delta\phi^{i,j,\xi}(t) = \phi^{i,j,\xi}(t + \Delta t) - \phi^{i,j,\xi}(t)$, el objetivo a lograr en cada iteración es la expresión (8) que debe generar el diseño de la ubicación óptima de los nuevos pozos a perforar. Se debe tener en cuenta que las iteraciones del modelo no se realizan simuladas, sino que se efectúan los sondeos reales en las nuevas localizaciones diseñadas, por ello se analizan en cada etapa los casos siguientes:

1. $\delta\phi^{i,j,\xi}(t) \cong 0$. En la dirección i, j, ξ se posee iguales valores de probabilidad en las etapas t y t + Δt. Esto indica que no hubo cambio en el comportamiento probabilístico, por tanto no hubo nuevo aporte de información.
2. $\delta\phi^{i,j,\xi}(t) \cong 1$. En la dirección i, j, ξ se tiene certeza de que ocurren las combinaciones de clases que expresa φ y por tanto la información desaparece.
3. $\delta\phi^{i,j,\xi}(t) > 0$. Hubo aporte de información en la dirección i, j, ξ entre t y t + Δt y generó entropía. Esto geológicamente indica que en esa dirección, la zona explorada tiene una estructura probabilística diferente y corresponde con un tipo diferente de perfil.
4. $\delta\phi^{i,j,\xi}(t) < 0$. En la dirección i, j, ξ el comportamiento probabilístico genera entropía y tiene una interpretación similar al caso 3, pero con la particularidad de que siempre puede ocurrir en las primeras iteraciones de sondeos hasta que ocurra uno de los casos 1 - 3.

Los casos 1 y 2 detienen la exploración en la dirección en que ocurran. En los casos 3 y 4 se divide la búsqueda de soluciones en dos sucesos posibles: el que indica la convergencia de aportes de información y el que indica que se deben incorporar nuevos puntos de sondeo porque aún existe potencial para la adquisición de información. En el segundo suceso se particulariza el análisis a los pozos del último grupo de sondeos.

En consideración a que el modelo es no paramétrico se construyen varias pruebas binomiales sucesivas que lo validan en cada iteración, con ellas se construye el vector de información \mathbb{I}_j^ξ para cada dirección j y cada metro ξ .

$$\mathbb{I}_j^\xi = -\mathcal{B}_{i,j,\xi}(\beta, y_\xi^{i,j}, n) \cdot \log\left(\mathcal{B}_{i,j,\xi}(\beta, y_\xi^{i,j}, n)\right) \quad (11)$$

De (11) se obtiene $\mathbb{I}_j = \sum_{\xi=1}^{pr} \mathbb{I}_j^\xi$ que es la cantidad de información aportada en la dirección j , este coeficiente normalizado mide el aporte de información que se calcula en cada paso de t a $t + \Delta t$ en la optimización:

$$i_j(t) = \frac{\mathbb{I}_j}{\|\mathbb{I}_j\|} \quad (12)$$

La diferencia del coeficiente (12) entre dos etapas se denota $\Delta i(t) = i(t + \Delta t) - i(t)$, las iteraciones de optimización se detienen para la dirección j cuando se alcanza el ajuste máximo, o sea, el error mínimo, lo que equivale al cumplimiento de las siguientes condiciones:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \Delta_j i(t) &= i^0 \\ \lim_{N(t) \rightarrow \infty} E_r &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$E_r = \left(\frac{i_j^0}{N(t)} \right) \cdot 100$$

Donde E_r es la *eficiencia del sondeo* hasta la etapa t y permite evaluar cada paso en el desarrollo de la exploración, optimizar y evaluar una red ya existente.

La red se diseña para cumplir las exigencias de categorización establecida, pero sin que ellas impidan obtener la densidad óptima. El seccionamiento de las áreas a explorar de acuerdo a criterios geológicos (Vera, 2001), se utiliza para acotar la aplicación de la analogía a perfiles típicos ya modelados con (3) en otros yacimientos. El modelo almacena la información creada con (1) de forma tipificada, luego se utiliza para generar la ubicación de sondeos y realizar pronósticos respecto a las clases patrones en zonas análogas (fig. 1).

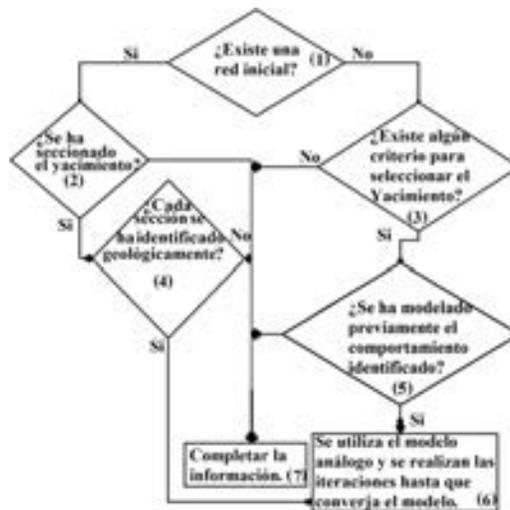


Fig. 1. Esquema de aplicación del modelo markoviano para la densificación de la red de exploración

En el diseño óptimo de la RMEE pueden aparecer los escenarios siguientes: si transcurre por las ramas 1→3→5→6 del árbol en la fig. 1, se diseña la ubicación de los primeros puntos del sondeo con un generador aleatorio de las posiciones, que responde a las leyes de probabilidad correspondientes a la zona, perfil o comportamiento análogo; si el escenario transcurre por las ramas 1→2→4→5→6 del árbol en la misma figura, la información cuantitativa y cualitativa de la región a explorar que se procesa con el modelo (3). Los nuevos sondeos se ubican con el modelo (8)-(13), una vez realizados los primeros sondeos se comienza a iterar para optimizar la red. Cuando la simulación es

suficiente y se logra una correcta analogía, la ubicación de los sondeos será muy precisa. En ambos casos la optimización logrará ajustar el modelo de yacimiento (3) con un mínimo de secuencias.

La determinación de los nuevos puntos comienza por elegir las direcciones perspectivas en cada iteración, lo cual se determina por el grado de entropía (ε) en cada dirección. Luego se encuentra en los pozos pivotes del último sondeo aquellos que posean mayor entropía, calculada por la distribución de las clases en el perfil de los pivotes. Se utiliza el sistema cilíndrico de coordenadas y se calculan (ρ, φ) de los nuevos sondeos, z es la cota de la superficie del terreno. El radio (ρ) se obtiene en función del espaciado de la red en la etapa precedente ($\tau - 1$), proporcional al desarrollo entrópico que es diferente en cada dirección y por tanto, no se generan redes con forma regular. El ángulo (φ) se obtiene de la multiplicación escalar de los vectores de las matrices de transición entre direcciones colindantes, partir de un pozo pivote elegido de la etapa precedente. La profundidad de las perforaciones en los YLOC se pronostica con el modelo (3). Las coordenadas de cada nuevo pozo serán:

$$x_i^{\hat{r}h} = x^{\hat{r}} + \rho_i^{\hat{r}} \cdot \cos \varphi_i^{\hat{r}}; y_i^{\hat{r}h} = y^{\hat{r}} + \rho_i^{\hat{r}} \cdot \sin \varphi_i^{\hat{r}} \quad (14)$$

3. Resultados y discusión

Para analizar el modelo de optimización de las RMEE se debe analizar cómo se interpreta el modelo Markoviano del yacimiento. El análisis se realizará en los yacimientos Punta Gorda, Yagrumaje Norte y Yagrumaje Sur, se utilizarán las clases definidas en Peña y Vera (2013) y cuya composición sustancial se expone en los gráficos de la fig. 2. El diseño de la red se probará en el bloque O48 del yacimiento Punta Gorda, porque este fue perforado en redes cuadradas hasta una densidad de 8 m de lado (R8) y esto permitió utilizar a los pozos reales perforados que se ubican menos distantes de los diseñados por el modelo (8)-(13) como pozos óptimos. En la modelación de este bloque, en la dirección horizontal, el paso t se extiende a los nueve pozos de la red de 33 m (R33) de lado, para excluir en el modelo la información de las redes de 16 m (R16) y R33, con vistas a evaluar la potencia que despliega el modelo (8)-(13).

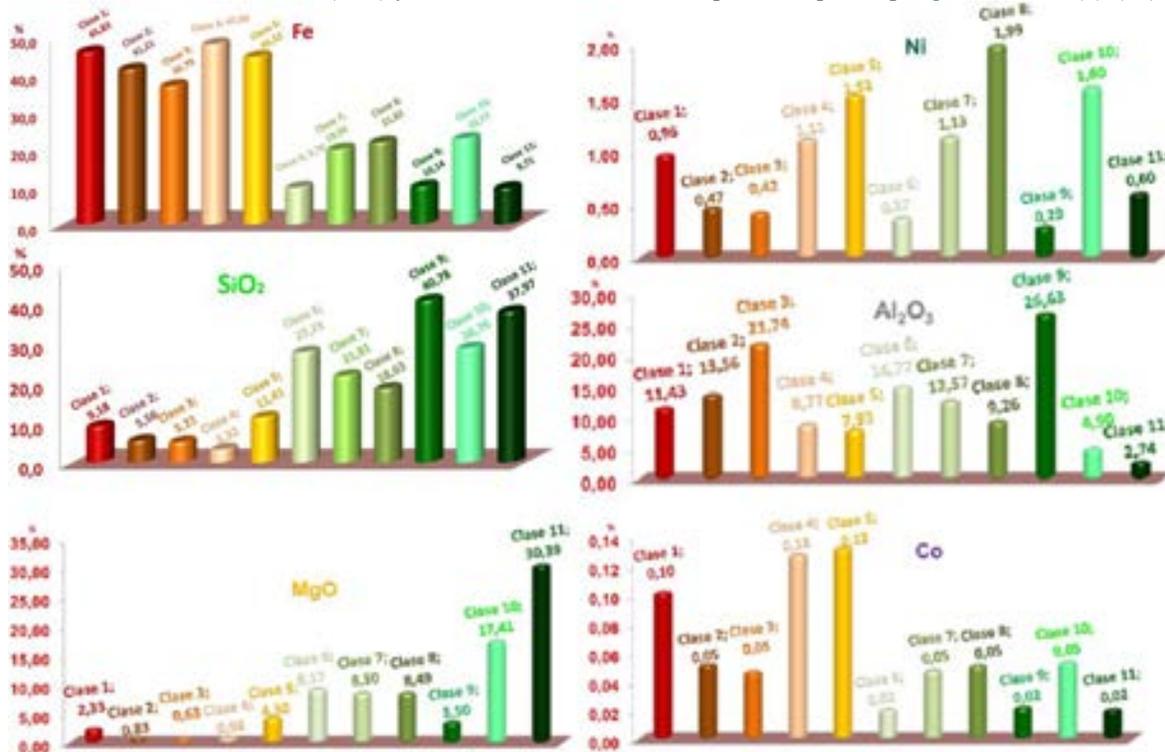


Fig. 2. Composición de las clases en los tres yacimientos

3.1. Interpretación del modelo markoviano

En la fig. 3 se exponen los gráficos de las probabilidades condicionales que resultan significativas en la dirección vertical en los tres yacimientos, de los que se concluye que cuando aparecen en el primer metro del perfil las clases asociadas al comportamiento de las menas limoníticas, ellas pronostican hacia la profundidad las clases que se asocian a las menas serpentiniticas y a las rocas del basamento. Cada clase genera distribuciones diferentes, acordes con los tipos de perfiles de intemperismo que se forman y que definen diferentes combinaciones de clases en el perfil, las cuales concuerdan con los modelos conocidos, donde los “ocres inestructurales” y los “ocres estructurales finales” se contraponen en el perfil a los “ocres estructurales iniciales” y la roca madre lixiviada (Lavaut, 1987 y 2004; Muñoz et al, 2009).

Lo anterior demuestra que la expresión (3) modeló nítidamente el perfil de los tres yacimientos y almacena las distribuciones probabilísticas de la zona modelada. A diferencia de otros modelos utilizados en el diseño de las RMEE el modelo (3) permite incorporar y utilizar las propiedades probabilísticas de yacimientos ya estudiados (Vera, 2001 y Cuador et al, 2003; Boucher et al, 2005), será más preciso si se combina el método de analogía y un análisis geológico profundo.

Se puede observar en la fig. 3 que después del intervalo 28 se predicen con alta probabilidad las clases asociadas a las rocas madres. El comportamiento a esta profundidad se utiliza para determinar la *máxima profundidad viable para extender el sondeo*. El modelo (3) aplicado al bloque O48 del yacimiento Punta Gorda determinó que a partir de esa profundidad se pierde el aporte informativo de las distribuciones condicionales de probabilidad de las clases. En este bloque el primer metro está compuesto mayoritariamente de la primera clase. Este resultado evita gastos sustanciales en la exploración.

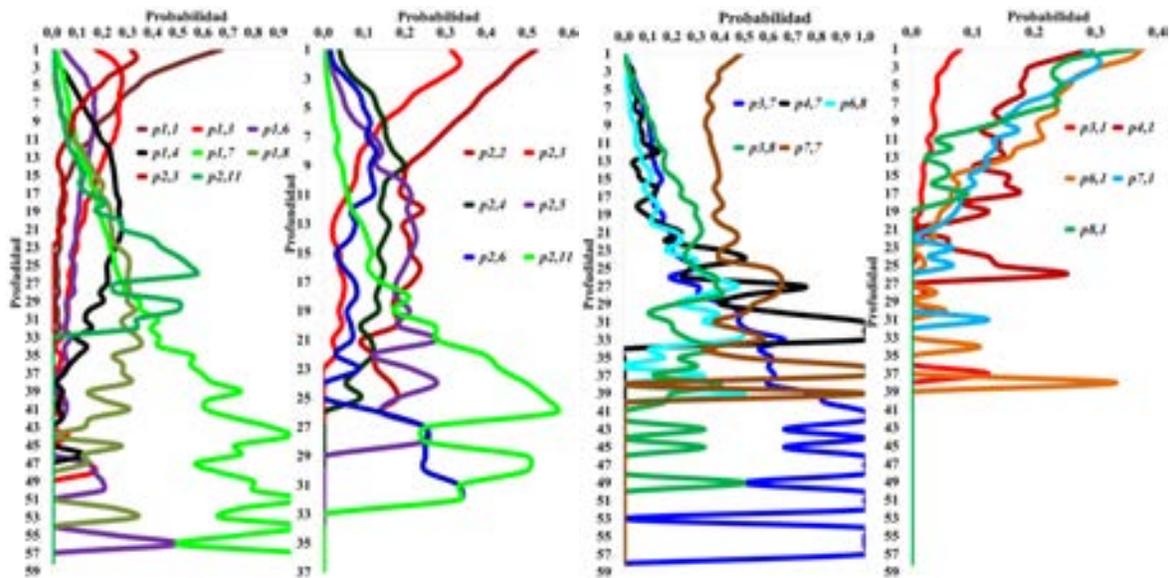


Fig. 3. Distribuciones de probabilidad de las clases 1, 2, 3, 4, 6, 7 y 8 desde el primer intervalo en el perfil

En la fig. 4 se observan las distribuciones significativas de probabilidad condicional en la horizontal ($\alpha \geq 0,1$) a lo largo del paso t , ellas marcan las tendencias de comportamientos que se combinan en las diferentes direcciones. La tendencia para cada combinación es diferente, se observa que en una dirección y en sentidos opuestos ellas pueden ser similares u opuestas, esto muestra que los modelos deben ser específicos en cada dirección y por ello las redes no son uniformes. El modelo (3) se precisa con los nuevos sondeos, si se alcanza una alta precisión el pronóstico puede ser suficiente para calcular volúmenes en determinados estadios de la exploración.

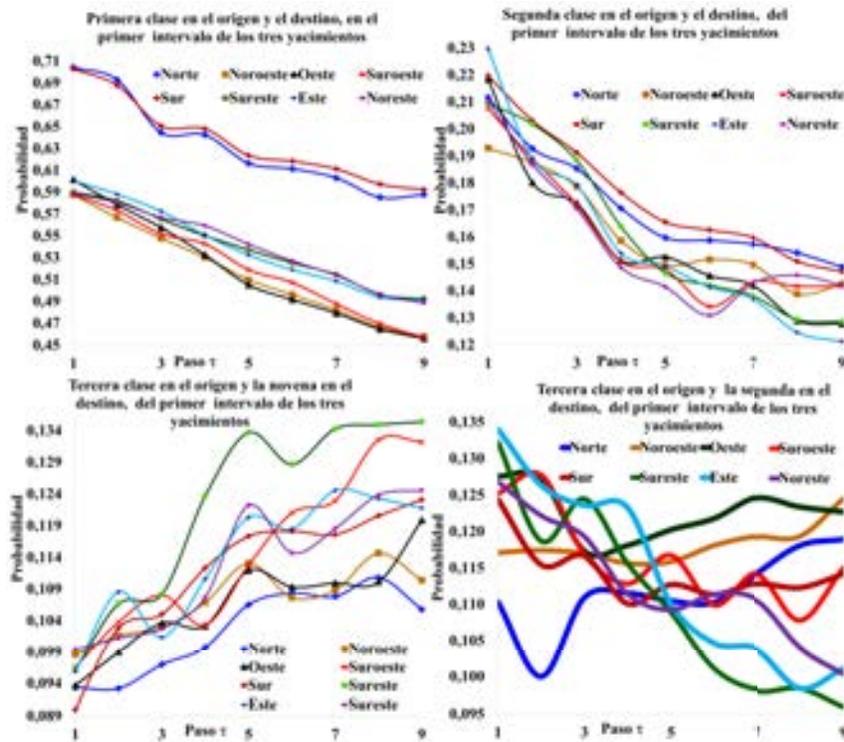


Fig. 4. Distribuciones de las combinaciones $p_{1,1}(\tau)$, $p_{3,3}(\tau)$, $p_{3,2}(\tau)$, $p_{2,1}(\tau)$ en el primer intervalo de los tres yacimientos

3.2. Optimización de la red de exploración en el bloque O48

Tabla I. Cálculo de los vectores $j_i(l, \xi)$. Primera iteración del modelo

	N	NO	O	SO	S	SE	E	NE
ϵ_i	0,95	0,00	0,06	0,00	0,78	0,14	0,00	0,14

Nota: $\gamma=0,10$; $n=28$; pozos =9

La optimización en el bloque O48 comienza con una red inicial de nueve pozos (red cuadrada con 100 m de lado) y el modelo de los tres yacimientos sin incluir este bloque. Se generan las matrices de diferencias $\delta\phi$ en ocho direcciones Norte (N) Noroeste (NO), Oeste (O), Suroeste (SO), Sur (S), Sureste (SE), Este (E) Noreste (NE), para cada metro y cada paso τ . Sólo se describe la primera iteración (t_0) por razones obvias de espacio. Para t_0 cuatro direcciones superan el nivel de significación $\epsilon_i \geq \gamma$ (tabla I) lo que indica que deben ser densificadas, γ se elige según Palafox (2009). Las direcciones elegidas N, S, SE, NE, se deducen de la tabla ii.

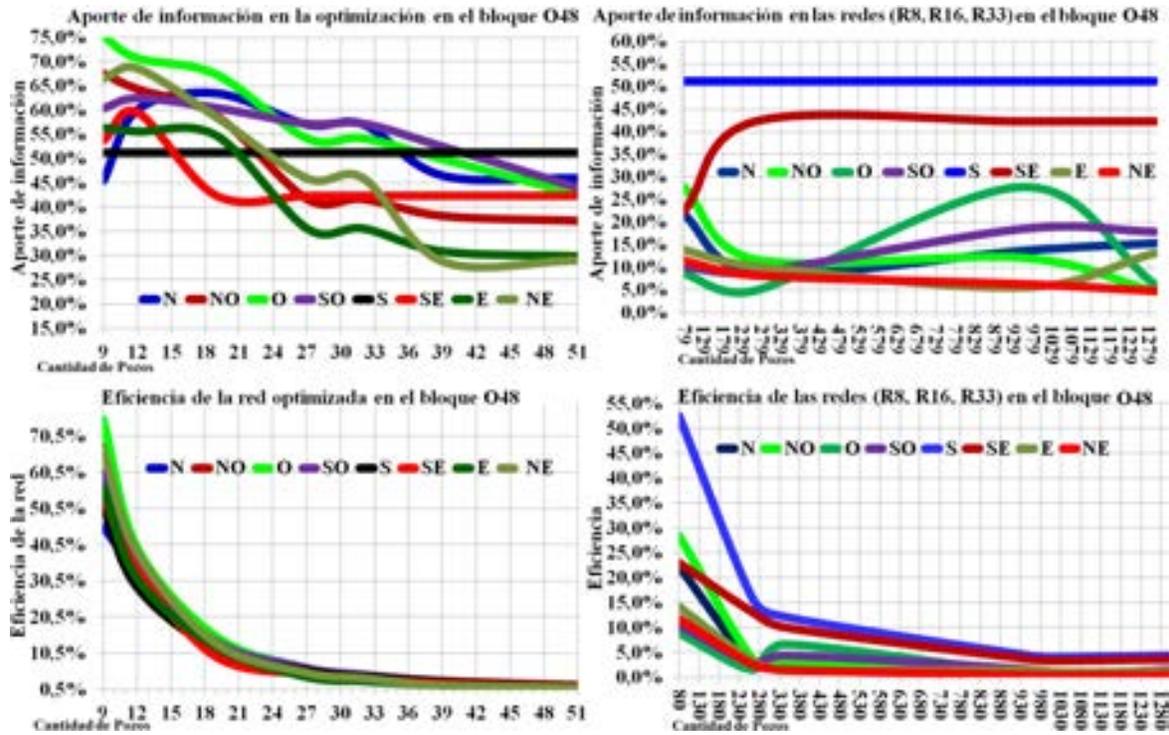


Fig. 5. Aporte de información $i(t)$ y eficiencias E_r , por direcciones en la optimización de la red del bloque O48

Cuatro nuevos pozos fueron el resultado del diseño óptimo en esta iteración del modelo (tabla ii). El pozo elegido como pivote, pertenece a la red de 100 m de lado (R100). Los pozos diseñados no se perforaron, se validaron con los sondeos más cercanos de la red de 8 m de lado, las distancias entre ellos no superan los 5 m y se asume este sesgo como aceptable (¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.).

Tabla II. Entropías y número de muestras calculado para la primera iteración del modelo.

	N	NO	O	SO	S	SE	E	NE
ε^i	13,0	12,8	12,7	12,6	13,0	12,8	12,7	12,7
ε_k	9	9	9	9	9	9	9	9
$\vartheta^i = \varepsilon^i - \varepsilon_k^i $	4	4	4	4	4	4	4	4

Luego el modelo itera hasta converger, el resultado se expone en los gráficos ubicados a la derecha en la fig. 5. La convergencia es diferente en cada dirección, en la quinta iteración las ocho direcciones convergen con 32 pozos. La eficiencia tiende a cero con rapidez cuando aumenta el número de pozos, fundamentalmente en las direcciones este y noreste en las cuales i^0 se hace constante con rapidez.

Tabla III. Coordenadas de los pozos diseñados y los reales perforados en la primera iteración del modelo

	Pozos Diseñados		Pozo perforado		$d(i,j)$	ID
	X_i	Y_i	X_j	Y_j		
Pozo pivote	4900,00	5600,00			-	BO48 R33 Sb56 P23
Pozo al oeste	4900,00	5599,99	4900,00	5600,00	0,01	BO48 R33 Sb56 P23
Pozo al este	4924,69	5620,89	4925,00	5624,67	3,79	BO48 R08 Sb65 P14
Pozo al noreste	4921,94	5603,85	4925,00	5600,00	4,91	BO48 R08 Sb66 P13
Pozo al noroeste	4902,03	5595,02	4900,00	5591,33	4,21	BO48 R08 Sb56 P24

En el esquema de la fig. 6 del bloque O48 se observa la coincidencia de los puntos óptimos diseñados con las concentraciones de isolíneas y singularidades del relieve, las cuales también se relacionan con las características geoquímicas y geológicas de la zona. El diseño óptimo utiliza sólo el 40 % de los pozos que se perforan en la R33, lo que muestra la potencialidad del modelo propuesto para adquirir la máxima información con el menor número de sondeos (60 % menos). La evaluación del aporte de información de las cuatro redes perforadas en el bloque O48 (R100, R33, R16 y R8) se expone en la parte derecha de la fig. 5. Se observa la baja eficiencia en la adquisición de información que presentan las redes tradicionales respecto a la densidad del sondeo, los resultados son sustancialmente inferiores

respecto a la red optimizada. Es importante notar que en la dirección sur el aporte es idéntico al obtenido en la red optimizada y en la sureste es muy similar, lo que indica la potencialidad de aporte de información en estas direcciones.

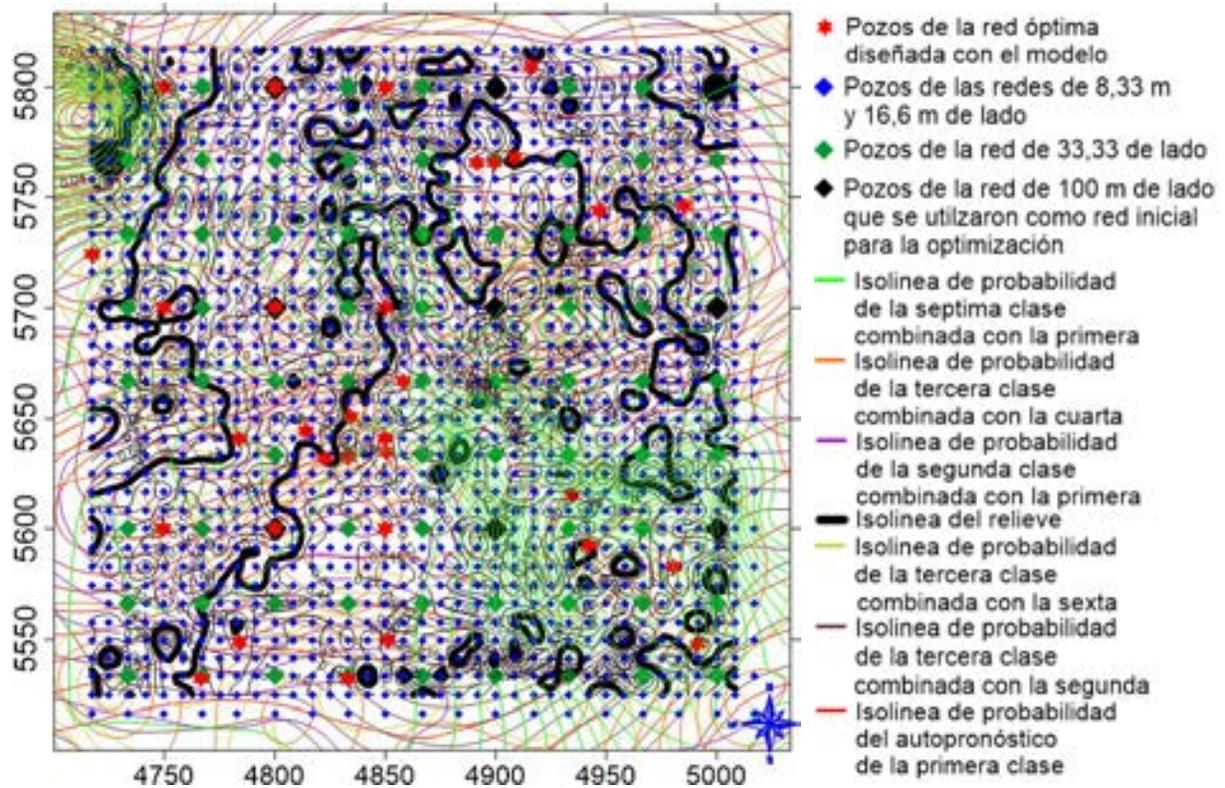


Fig. 6. Isovalores de probabilidad de las combinaciones sobre el bloque O48 con los pozos óptimos diseñados

En la fig. 6 se observa que en la diagonal suroeste-noreste el bloque se divide en dos zonas diferentes por sus cotas, esta diferencia de nivel muestra que ocurrieron procesos tectónicos que la originaron y se relacionan con las propiedades del material intemperizado que se comprueba de los gráficos del techo y del fondo de las menas los que están alineados con el relieve.

En el bloque O48 se proyectan las distribuciones condicionales de las clases, generadas por el modelo desarrollado desde el pozo central en la dirección horizontal (

fig. 6). Se nota que las mayores concentraciones de isovalores se alinean de manera paralela (suroeste - noreste) u ortogonal (noroeste-sureste) a las líneas de isonivel, para abreviar se graficaron los valores de las combinaciones significativas sólo del primer intervalo y del intervalo 28. Las combinaciones de la séptima clase se alinean noroeste-sureste, mientras que las combinaciones de la primera, la segunda y la tercera clase se alinean suroeste - noreste.

Los pozos diseñados por el modelo se ubicaron en los puntos de mayor coincidencia de las líneas de isovalores de probabilidad, la mayor concentración de sondeos se ubican en la diagonal sureste-noreste, alineados con las diferencias de nivel en el bloque.

Se prueba en cada grupo de sondeos el ajuste del modelo para describir con precisión el yacimiento, el ajuste detiene el diseño y la falta de ajuste genera nuevos puntos. Esto coincide con las ideas fundamentales en la optimización del muestreo, pues el diseño de los sondeos sigue la distribución de las clases (Berger, 2010). En estos gráficos solo se esquematiza el proceso automático de solución del modelo, donde intervienen todas las combinaciones de cada intervalo y en cada dirección.

Las direcciones de mayor aporte de información corresponden a una región del bloque con un relieve particular el cual está vinculado al relieve del fondo de las menas (fig. 7). Se observan pequeños cambios de nivel en el relieve que se amplifican en el fondo y concuerda con el nivel donde inician y culminan las menas, razón suficiente para generar una alta entropía en la ocurrencia de las clases dentro del bloque, la cual es proporcional a las probabilidades. La

optimización concentra siete pozos en la zona central alrededor de la diagonal suroeste – noreste, donde los cambios de nivel tienen mayores valores. De los siete pozos, tres se ubican sobre la línea de nivel del relieve que separa dos regiones en el bloque y los otros pozos en las líneas menores del nivel del relieve y del fondo.

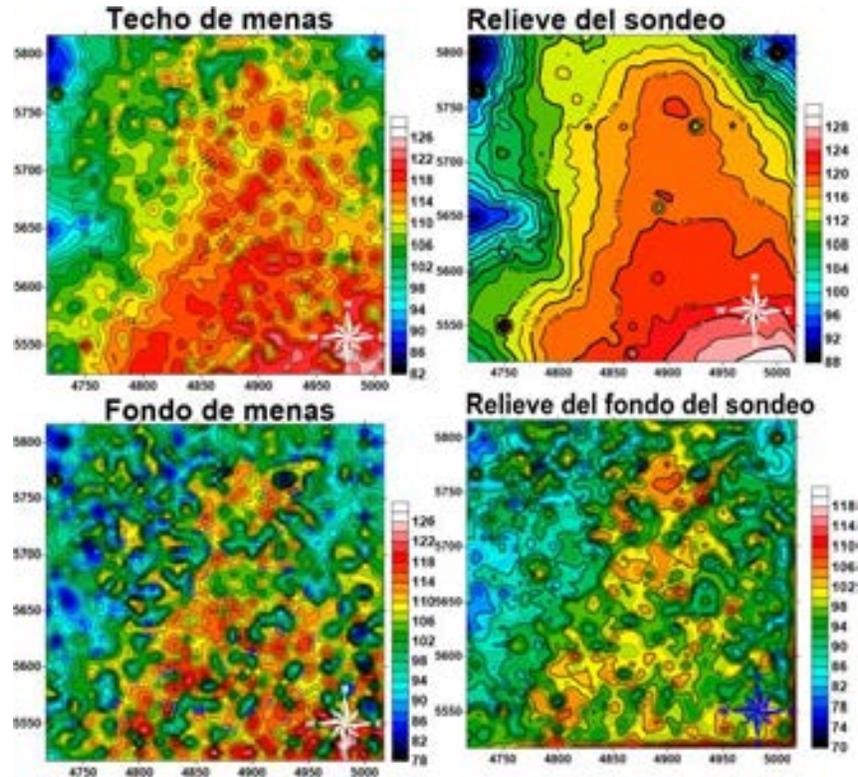


Fig. 7. Esquema de las cotas superiores e inferiores del sondeo y de las menas en el bloque O48

La correspondencia de los pozos diseñados en la optimización, con las isolíneas de probabilidad de las clases se nota en la fig. 6, donde cada pozo coincide con alguna de las siete isolíneas que se han graficado, lo que demuestra que la optimización sigue las propiedades probabilísticas de las clases y ubica los pozos en aquellas posiciones que garantizan que el modelo se identifique con precisión al yacimiento o la zona modelada para el diseño de las RMEE, pues ubica los puntos en las posiciones precisas para adquirir la información del yacimiento.

Conclusiones

Se desarrolló un nuevo modelo matemático de yacimiento, que integra con cadenas de Markov, la clasificación sustancial con la estructura espacial del yacimiento. Se mostró la efectividad de este modelo para describir el comportamiento en los yacimientos lateríticos, lo que permitió desarrollar un nuevo sistema de modelos para optimizar el diseño de las redes del muestreo exploración y explotación, que maximiza en cada dirección la relación entre la cantidad de información y el número de sondeos. Un aspecto particular en los modelos obtenidos es que se utiliza la entropía para calcular la cantidad de información a partir de las probabilidades condicionales de las cadenas de Markov del modelo de yacimiento. Con estos modelos se redujo, en el bloque O48, un 60 % de los pozos utilizados típicamente para estimar el comportamiento sustancial.

Agradecimientos

Los resultados del artículo no se hubiesen logrado sin la realización de los proyectos 1265, 600100 y 600124, financiados por el extinto Ministerio de la Industria Básica, desarrollados en el Centro de Investigaciones del Níquel (años 2006-2011). A mi esposa, a mis compañeros de trabajo y al conjunto de especialistas de la industria cubana del níquel que siempre me aportaron información y el complemento de los conocimientos de geología y minería.

Referencias bibliográficas

- Arderí García A, García de la Cruz M. I. 2003. Control de la Dilución en el Yacimiento Punta Gorda. *Memorias GEOMIN'2003*. La Habana, del 24 al 28 de marzo. TGMNI-117. ISBN: 959-7117-11-8.
- Bajvalov N. S, Zhidkov N.P, Koviolkov G.M.1987. *Métodos de Cálculo*. 598 pp. Ed. Nauka. Moscú. [en Ruso].
- Berger Martijn P. F. Optimal Designs for Latent Variable Models: A Review. Disponible <http://www.ipn.uni-kiel.de/aktuell/buecher/rostbuch/c05.pdf>. Consultado el 05/02/2010.
- Boucher A, Dimitrakopoulos R, Vargas-Guzman J.A. 2005. Joint Simulations, Optimal Drillhole Spacing and the Role of the Stockpile. *Geostatistics Banff*. O. Leuangthong and C. V. Deutsch (eds.). Springer. Printed in the Netherlands, pag:35-44. Consultado el 26/03/2012. http://cosmo.mcgill.ca/research/pdf/geo/GEO_%5B2005%5DBOUCHER_DIM_Joint_simulation_optimal_drillhole_spacing_and_the_role_of_the_stockpile.pdf
- Cuador Gil J. Q. 2002. Estudios de Estimación y Simulación Geoestadística para la Caracterización de Parámetros Geólogo - Industriales en el Yacimiento Laterítico Punta Gorda. Tesis Presentada en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Técnicas, Universidad de Pinar del Río, Pinar del Río.
- Cuador Gil J. Q, Estévez Cruz E., Lavaut Copa W. 2003. Definición de Redes Racionales Exploración en Yacimientos Lateríticos Usando Procedimientos Conjuntos de Estimación y Simulación Geoestadística. En: Taller Internacional de la Geología y Minería del Níquel Cubano. V Congreso de Geología y Minería de la Sociedad Cubana de Geología, GEOMIN'2003. La Habana, 24-28 de Marzo del 2003. (Memorias) [CD-ROM], pp. TGMNI.10. ISBN: 959-7117-11-8.
- De Dios Leyva D, Díaz Martínez R. 2003. Distribución y clasificación de las intercalaciones en el yacimiento laterítico ferroniquelífero punta gorda, Moa, Cuba. *Minería y Geología*, No. 3-4. pp. 5-17. ISSN 0258 5979.
- De Vettler D. R. 1955. How Cuban Nickel ore was formed: a lesson in laterite genesis?. *Engineering and Mining Journal*. Vol 156. No. 10. pp 84-87.
- Duggan S, Dimitrakopoulos R. 2005. Application of Conditional Simulation to Quantify Uncertainty and to Classify a Diamond Deflection Deposit. *Geostatistics Banff 2004*. eds: O Leuanthong and C.V Deutsch. Springer.Printed in Netherlands. pp 419-428.
- Fernández Martínez L, León Mariño M, Reynosa Hernández C. 2007. Evaluación del Esquema Informativo Minero y su Incidencia en los Resultados la Calidad de las Operaciones Mineras. *CD, Memorias de la II Convención Cubana de Ciencias de la Tierra*. MIN2-P41. ISBN: 978-959-7117-16-2. La Habana.
- Fernández Martínez L, León Mariño M. 2009. Consideraciones Acerca de la Dilución en Yacimientos Lateríticos de Ni y Co y Factores Geológicos que Influyen en su Comportamiento. *III Convención Cubana de Ciencias de la Tierra*. MIN2-. La Habana, Cuba, 16-20 de Marzo del 2009. (Memorias) [CD-ROM]. ISBN: 978-959-7117-19-3.
- Freyssinet P. H, Butt C.R.M, Morris R.C. 2005. Ore forming processes related to lateritic weathering. *Economic Geology*. 100 th Anniversary Volume, pp. 681-722.
- Gleeson S. A, Herrington R. J, Durango J, Velásquez C. A, Koll G. 2004. The Mineralogy and Geochemistry of the Cerro Matoso S.A. Ni Laterite Deposit, Montelíbano, Colombia. *Economic Geology*. Vol. 99, pp. 1197–1213.
- Kolmogorov A. N. 1956. *Foundations of the Theory of Probability*. Second English Edition. Chelsea Publishing Company. New York.
- Kolmogorov A. N, Zhupbenkov I. G, Projorov A. B. 1982. Vidienie v teorii veroiatnostiey. *Vibliotiechka kbant*. Vuipusk 23. Glavnaia redakia fiziko-matematicheskoi literaturi. Ed. Nauka. Moskva.
- Lavaut Copa W. 1987. *Control litológico-mineralógico de la mineralización en la corteza de intemperismo de ultramafitas del campo mineral yacimientos Punta Gorda, Camariocas y Piloto*. Tesis Doctoral. Archivo E.G.S. Moscú.
- Lavaut Copa W. 2003. La Meteorización de la Ofiolita de Cuba Oriental. Modelos Geológicos y Terminología Cubana. *V Congreso de Geología y Minería de la Sociedad Cubana de Geología*, GEOMIN'2003. La Habana. TGMNI.03. [CD-ROM] ISBN: 959-7117-11-8.
- Lavaut Copa W. 2004. Patrones de Meteorización de Rocas Ofiolíticas de Cuba Oriental: su Importancia para la Minería. *Minería y Geología*. Nos. 3-4, ISSN: 0258 5979.

- Legrá Lobaina A. A. 1999. Metodología para el Pronóstico, Planificación y Control de la Minería en Yacimientos Lateríticos. Tesis en Doctoral. CUJAE, La Habana.
- Llorca S. M. 1993. Metallogeny of supergene cobalt mineralization, New Caledonia. *Australian Journal of Earth Sciences*, 40, pp. 377-385.
- Muñoz Gómez J. N., A. Rodríguez Infante, L.O Vera Sardiñas, A. Martínez Vargas. 2009. Modelo Genético Teórico de los Yacimientos Lateríticos Asociados al Macizo Ofiolítico de Moa-Baracoa: Implicaciones de la Exploración de Explotación. *III Convención Cubana de Ciencias de la Tierra*. La Habana, Cuba, 16-20 de Marzo. MIN2-P27. [CD-ROM] ISBN: 978-959-7117-19-3.
- Palafox Duarte C. 2009. *Inferencia Estadística para Cadenas de Markov*. Tesis de Maestría. División de Ciencias Exactas y Naturales Universidad de Sonora. Hermosillo, Sonora, México.
- Peña Abreu R. E. 1998. *Optimización Combinatoria Aplicada a la Industria del Níquel*. Tesis de Maestría, Universidad Central de las Villas, Santa Clara.
- Peña Abreu R.E, Trujillo Codorniu R. 2005. Algunos Problemas de Programación Cuadrática Binaria Asociados a la Minería. Publicación del Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados, Departamento de Matemática. DF México, Reporte interno # 357.
- Peña Abreu R. E, Legrá Lobaina A. 2005. Nuevo enfoque al problema de la optimización de redes de exploración en yacimientos lateríticos. Centro Nacional del Derecho de Autor (CENDA). Registro: 1116-2005. I Convención Cubana de ciencias de la Tierra. La Habana, Cuba, 5-8 Abril. Resumen [CD-ROM] ISBN: 959-7117-03-7.
- Peña Abreu R.E, L. O. Vera Sardiñas. 2013. Identificación de clases patrones para la modelación matemática en yacimientos de cubanos níquel. *Ciencias de la Tierra y el Espacio*. Vol. 14. No. 2. ISSN: 1729-3790. Disponible en: <http://www.iga.cu/Publicaciones/revista/index.htm>.
- Proenza J. A, Galí S, Labrador M, Melgarejo J. C, Tauler E, Rojas Purón A, Muñoz Gómez N, Orozco Melgar G, Rodríguez Vega A, Blanco Moreno J. A, Pérez Melo N, Marrero N, Lavaut W. 2007. Nuevos Datos Sobre los Minerales Portadores de Ni Y Co en los Perfiles Lateríticos de Cuba Oriental. *II Convención Cubana de Ciencias de la Tierra*. La Habana, 20-23 de Marzo. MIN2-02. [CD-ROM] ISBN: 978-959-7117-16-2.
- Proenza J. A. Roque Rosell J. M. Labrador, Galí S. Tauler E. Gallardo T. Lewis J. F. Longo F. 2010. Mineralizaciones de Co en los Depósitos Lateríticos de Ni Tipo Óxido y Silicato Hidratado. *Revista de la sociedad española de mineralogía*. MACLA. No 13.
- Projorov Y. B, Rozanov. Y.A. 1973. *Teoria Veroiatnostey. Asnovnie Poniatii, Predielnie Teoremi y Sluchainie Protessin* (Teoría de las probabilidades, Conceptos fundamentales, teoremas del límite y procesos aleatorios). 2da ed. Masckva, Nauka. 494 pp.
- Rodríguez Cardona A, Rodríguez Ruiz H. 1987. Distribución del Níquel en los Yacimientos Lateríticos Cubanos. *Revista Tecnológica*. Vol. XVII. No.3, pp. 19-26.
- Shannon C. E. 1948. A Mathematical Theory of Communication. Reprinted with corrections from The Bell System Technical Journal. July vol. 27, pp. 379-423, 623-656.
- Sujariev A.G, Timojov A. V, Feodorov V. V. 1986. Kurs Metodov Optimizatsii (Curso de métodos de optimización). Primera edición. Moscú. Ed. Naúka, (en Ruso).
- Vera Sardiñas L. O. 2001. *Procedimiento para la determinación de las redes racionales de exploración de los yacimientos lateríticos de níquel y cobalto en la región de Moa*. [Tesis Doctoral], Instituto Superior Minero Metalúrgico, Moa.
- Wilson M. J. 2004. Weathering of the primary roc-forming minerals: processes products and rates. *Clay Minerals*. No 39. Pp. 233-266.

Acerca del autor:

Ramón Eddie Peña-Abreu: Doctor en Ciencias Técnicas y Máster en Física y Matemática, con 26 años de experiencia, 23 de los cuales han sido dedicados a la actividad científica y docente, ha dirigido proyectos de investigación y servicios científicos. Ha impartido alrededor de 15 asignaturas de cursos regulares en el Instituto Superior Minero Metalúrgico de Moa, y cursos de postgrados. Participa en congresos internacionales. Ha publicado más de 35 artículos. Es miembro de varias sociedades científicas y del comité científico de varios eventos. Actualmente se desempeña como jefe de proyectos y un servicio de investigación para la industria del níquel.

Anexo A. Estructura algebraica del modelo markoviano

Sea la entidad algebraica:

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_{1,1,\xi} & \cdots & \pi_{1,u,\xi} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{v,1,\xi} & \cdots & \pi_{v,u,\xi} \end{pmatrix} \quad (58)$$

La cual está compuesta por los elementos $\pi_{i,j,\xi}$, los cuales son vectores compuestos por matrices.

$$\pi_{i,j,\xi} = \begin{pmatrix} \pi_{i,j,1} \\ \vdots \\ \pi_{i,j,p_r} \end{pmatrix}; \pi_{i,j,1} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix} \quad \dots \quad \pi_{i,j,p_r} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Se exponen las operaciones de multiplicación de Π por un escalar y entre entidades Π :

Producto por un escalar

Cada elemento de Π es una matriz cuadrada por ello se pueden multiplicar por un valor escalar $k \in \mathfrak{R}$ entonces:

$$k \cdot \Pi = \begin{pmatrix} k \cdot \pi_{1,1,\xi} & \cdots & k \cdot \pi_{1,u,\xi} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot \pi_{v,1,\xi} & \cdots & k \cdot \pi_{v,u,\xi} \end{pmatrix} \quad (63)$$

Producto de las entidades Π

La estructura matricial entidades Π está compuesta de tres capas, su producto se realizará elemento a elemento en cada una de sus capas.

$$\Pi^c = \Pi^a \circ \Pi^b = \begin{pmatrix} \pi_{1,1,\xi}^a & \cdots & \pi_{1,u,\xi}^a \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{v,1,\xi}^a & \cdots & \pi_{v,u,\xi}^a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \pi_{1,1,\xi}^b & \cdots & \pi_{1,u,\xi}^b \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{v,1,\xi}^b & \cdots & \pi_{v,u,\xi}^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_{1,1,\xi}^a \circ \pi_{1,1,\xi}^b & \cdots & \pi_{1,u,\xi}^a \circ \pi_{1,u,\xi}^b \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{v,1,\xi}^a \circ \pi_{v,1,\xi}^b & \cdots & \pi_{v,u,\xi}^a \circ \pi_{v,u,\xi}^b \end{pmatrix} \quad (65)$$

La multiplicación de los vectores $\pi_{i,j,\xi}^a$ y $\pi_{i,j,\xi}^b$ es un producto escalar de vectores donde sus elementos son matrices, siguiendo las reglas del producto introducido se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \pi_{1,1,\xi}^a \circ \pi_{1,1,\xi}^b & \cdots & \pi_{1,u,\xi}^a \circ \pi_{1,u,\xi}^b \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{v,1,\xi}^a \circ \pi_{v,1,\xi}^b & \cdots & \pi_{v,u,\xi}^a \circ \pi_{v,u,\xi}^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} p_{1,1}^a \cdot p_{1,1}^b & \cdots & p_{1,n}^a \cdot p_{1,n}^b \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1}^a \cdot p_{n,1}^b & \cdots & p_{n,n}^a \cdot p_{n,n}^b \end{pmatrix} \right)_{1,1,\xi} & \cdots & \left(\begin{pmatrix} p_{1,1}^a \cdot p_{1,1}^b & \cdots & p_{1,n}^a \cdot p_{1,n}^b \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1}^a \cdot p_{n,1}^b & \cdots & p_{n,n}^a \cdot p_{n,n}^b \end{pmatrix} \right)_{1,u,\xi} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\begin{pmatrix} p_{1,1}^a \cdot p_{1,1}^b & \cdots & p_{1,n}^a \cdot p_{1,n}^b \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1}^a \cdot p_{n,1}^b & \cdots & p_{n,n}^a \cdot p_{n,n}^b \end{pmatrix} \right)_{v,1,\xi} & \cdots & \left(\begin{pmatrix} p_{1,1}^a \cdot p_{1,1}^b & \cdots & p_{1,n}^a \cdot p_{1,n}^b \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1}^a \cdot p_{n,1}^b & \cdots & p_{n,n}^a \cdot p_{n,n}^b \end{pmatrix} \right)_{v,u,\xi} \end{pmatrix} \quad (66)$$

Pueden multiplicarse dos entidades Π^a y Π^b , en una de las cuales los vectores $\pi_{i,j,\xi}$ no están compuesto de matrices si no de escalares, en tal caso la multiplicación de los elementos en la entidad múltiplo, se realizará según la regla de la multiplicación de una matriz por un escalar.

En tal caso, suponiendo que $\pi_{i,j,\xi}^b = \begin{pmatrix} f_{1,1,\xi}^b & \cdots & f_{1,u,\xi}^b \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{v,1,\xi}^b & \cdots & f_{v,u,\xi}^b \end{pmatrix}$, donde $f_{1,1,\xi}^b = \begin{pmatrix} f_{1,1,\xi}^b(x) \\ \vdots \\ f_{1,1,p_r}^b(x) \end{pmatrix}$ son funciones escalares o simplemente un valor perteneciente a los reales, entonces:

$$\begin{pmatrix} \pi_{1,1,\xi}^a \circ \pi_{1,1,\xi}^b & \dots & \pi_{1,u,\xi}^a \circ \pi_{1,u,\xi}^b \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{v,1,\xi}^a \circ \pi_{v,1,\xi}^b & \dots & \pi_{v,u,\xi}^a \circ \pi_{v,u,\xi}^b \end{pmatrix} = \left(\left(\begin{pmatrix} p_{1,1}^a \cdot f_{1,1,1}^b & \dots & p_{1,n}^a \cdot f_{1,1,1}^b \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1}^a \cdot f_{1,1,1}^b & \dots & p_{n,n}^a \cdot f_{1,1,1}^b \end{pmatrix} \right)_{1,1,\xi} \dots \left(\begin{pmatrix} p_{1,1}^a \cdot f_{1,u,1}^b & \dots & p_{1,n}^a \cdot f_{1,u,1}^b \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1}^a \cdot f_{1,1,1}^b & \dots & p_{n,n}^a \cdot f_{1,u,1}^b \end{pmatrix} \right)_{1,u,\xi} \right) \quad (67)$$

$$\left(\left(\begin{pmatrix} p_{1,1}^a \cdot f_{1,1,p_r}^b & \dots & p_{1,n}^a \cdot f_{1,1,p_r}^b \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1}^a \cdot f_{1,1,p_r}^b & \dots & p_{n,n}^a \cdot f_{1,1,p_r}^b \end{pmatrix} \right)_{1,1,\xi} \dots \left(\begin{pmatrix} p_{1,1}^a \cdot f_{1,u,p_r}^b & \dots & p_{1,n}^a \cdot f_{1,u,p_r}^b \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1}^a \cdot f_{1,u,p_r}^b & \dots & p_{n,n}^a \cdot f_{1,u,p_r}^b \end{pmatrix} \right)_{1,u,\xi} \right)$$

$$\left(\left(\begin{pmatrix} p_{1,1}^a \cdot f_{v,1,1}^b & \dots & p_{1,n}^a \cdot f_{v,1,1}^b \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1}^a \cdot f_{v,1,1}^b & \dots & p_{n,n}^a \cdot f_{v,1,1}^b \end{pmatrix} \right)_{v,1,\xi} \dots \left(\begin{pmatrix} p_{1,1}^a \cdot f_{v,u,1}^b & \dots & p_{1,n}^a \cdot f_{v,u,1}^b \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1}^a \cdot f_{v,u,1}^b & \dots & p_{n,n}^a \cdot f_{v,u,1}^b \end{pmatrix} \right)_{v,u,\xi} \right)$$