Ciencias de la Tierra y el Espacio, enero-junio, 2013, Vol.14, No.1, pp.91- 97, ISSN 1729-3790

Validación del algoritmo TFE usado para la determinación de la respuesta en frecuencia de sensores sísmicos, límite de confiabilidad

Eduardo R. Diez-Zaldívar

Centro Nacional de Investigaciones Sismológicas (CENAIS).Calle 17 # 61 e/ 4 y 6, Reparto Vista Alegre.Santiago de Cuba,.CUBA..E-mail: diez@cenais.cu

Recibido: mayo 15, 2012	Aceptado: diciembre 29, 2012

Resumen

Se presentan los resultados obtenidos en la validación del método *TFE* para el cálculo de la respuesta en frecuencia de sensores sísmicos, estableciendo los límites de este. Para ello, se calculan las relaciones entrada-salida, salida-entrada y el recíproco de un sistema lineal invariante excitado con una señal de ruido, en este caso considerando al sismómetro como un filtro pasoalto ideal, a fin de comparar los valores obtenidos. Las diferencias observadas permiten definir los límites en que la función *TFE* funciona de forma lineal. Todo el script está programado en MATLAB 2009 para Windows. Se concluyé presentando los límites en frecuencia en los cuales el algoritmo resulta fiable.

Palabras clave: *TFE*, filtro, MATLAB, sismómetro, respuesta a frecuencia.

Validation of TFE algorithm used for seismic sensor frequency response determination, reliability limit

Abstract

In this paper we are presenting the results obtained for validation of *TFE* method for calculating the seismic sensors frequency response, establishing the limits of this method. To do this, we calculated the input-output, output-input and reciprocal relationships of an invariant linear system excited by a white noise signal, in this case considering the seismometer as an ideal high-pass filter in order to compare the values obtained. The observed differences are useful to define the limits within which the *TFE* function operates in a linear way. The entire script is programmed in MATLAB 2009 for Windows. Finally, we are presenting the frequency limits in which the TFE algorithm has a good feasibility.

Keywords: *TFE*, filter, MATLAB, seismometer, frequency response.

1. Introducción

La esencia de la calibración mediante el método absoluto consiste en la excitación de los sensores sísmicos mediante una señal de amplitud y frecuencia controlada, la lectura de la señal a la salida de los terminales de la bobina de transducción del sensor y el cálculo de la función de transferencia de este mediante herramientas matemáticas de determinación de la función de respuesta en frecuencia y fase. Existen varios métodos para lograrlo aplicándose, en este documento, el uso de señales aleatorias de ruido blanco gaussiano convenientemente filtradas y adecuadas a la banda de interés desde el punto de vista sismológico.

El diseño utilizado está asociado al uso de una mesa vibratoria mecánica y un sistema electrónico-digital para el control de todas las señales de operación; la generación e inyección de señales convenientemente filtradas y ecualizadas, la digitalización en tiempo real y el cálculo de las funciones de transferencia de acuerdo a la expresión:

$$H(f) = \frac{Canal\ B(f)}{Canal\ A(f)}$$

Las interfaces de cálculo están escritas en MATLAB 2009 a través del programa VIBROCALC diseñado para el análisis de señales y la determinación de funciones de transferencia.

En el caso específico del uso de esta metodología para calibración absoluta de sensores sísmicos, se hizo necesario identificar las influencias que ejercen cada uno de los elementos que intervienen en el proceso de obtención de la respuesta en frecuencia, porque la correcta determinación de estas, permite eliminar los errores del proceso en aras de la completa certificación de esta metodología.

Esto incluye elementos de hardware y software, a saber la influencia que, sobre la señal, ejercen los vibradores, el desplazamiento de las partes móviles con relación a las fijas y el error intrínseco de los sensores de posicionamiento láser. Además, las inexactitudes y errores de las herramientas matemáticas que se usan en la elaboración de la respuesta final en frecuencia y fase.

El método TFE es una de las herramientas matemáticas del paquete de programas de tratamiento de señales de MATLAB, usados en VIBROCALC para la determinación de la respuesta en frecuencia de sistemas de 2do orden, donde las señales de salida no siguen linealmente a sus similares de entrada.

Resulta necesario determinar el comportamiento en frecuencia de este algoritmo y definir en que márgenes las soluciones que este brinda son lineales y en los que no, así como a qué tipo de curva matemática definida se aproxima más la respuesta en frecuencia.

Este artículo aborda el problema de forma teórica, obviando el sismómetro y sustituyéndolo, método perfectamente posible por las propiedades que presenta como Sistema Lineal Invariante en el tiempo (LTI), por su equivalente, un filtro ideal programable mediante comandos de MATLAB.

2. Métodos

Para analizar la confiabilidad de los resultados obtenidos mediante la función TFE (Transfer Function Estimate), es necesario considerar que el método en esencia realiza la transformada rápida de Fourier, en su forma general (FFT de sus siglas en inglés) de la siguiente manera:

forma directa:

$$X(k) = \sum_{j=1}^{N} X(j)\omega_N^{(j-1)(k-1)} \qquad (1)$$

e inversa:

$$x(j) = \left(\frac{1}{N}\right)\sum_{k=1}^{N} X(k)\omega_N^{-(j-1)(k-1)} \qquad (2)$$

Cuando la señal de entrada a un sistema LTI es un proceso aleatorio X(t), del cual el ruido blanco es parte, la salida también es un proceso del mismo tipo Y(t). Si se cumple que:

$$Y(t) = H[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad (3.)$$

donde el miembro derecho es la integral de convolución entre la señal de entrada y la respuesta a impulso.

La respuesta a impulso h(t) se describe por su transformada de Fourier de la forma:

$$H(f) = F[h(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi ft}dt \qquad (4)$$

donde H(f) es la función de transferencia del sistema.

El algoritmo TFE determina la relación entre las densidades espectrales de potencia para dos vectores X y Y de la forma siguiente:

$$Txy(f) = \frac{Pxy(f)}{Pxx(f)} \qquad (5)$$

donde Txy es el cociente cruzado entre las densidades espectrales de potencia P_{yx} del vector X y P_{xx} del vector Y (señales de entrada y salida respectivamente).

La función de transferencia resulta el cociente entre el espectro cruzado de X y Y dividido por el espectro de potencia de X, para un valor determinado de frecuencias a las cuales es determinado este cociente. En este sistema la correlación cruzada de las señales de entrada y salida da como resultado la respuesta impulsiva del sistema.

La forma detallada, desde el punto de vista matemático, y las herramientas fuentes de estos métodos pueden ser encontradas en (Cooley y Tukey, 1965).

Incluso los algoritmos FFT "exactos" presentan errores cuando se utilizan los métodos de cálculo de aritmética de precisión finita de punto flotante, pero estos errores suelen ser bastante pequeños, la mayoría de los algoritmos FFT, por ejemplo el propuesto por Cooley-Tukey, tienen excelentes propiedades numéricas como consecuencia de la suma racional de los algoritmos.

Todos los algoritmos FFT discutidos calculan la DFT (Transformada de Fourier discreta) exactamente igual en aritmética exacta, es decir dejando de lado errores de punto flotante. Algunos algoritmos "FFT" han sido propuestos, sin embargo, para calcular la DFT aproximadamente con un error que se puede resultar arbitrariamente pequeño a costa del aumento de los cálculos. Tales algoritmos tratan el error de aproximación aumentando la velocidad de cálculo u otras propiedades. Por ejemplo, el algoritmo FFT propuesto por (Edelman et al., 1999) logra menores requisitos de comunicación para la computación en paralelo con la ayuda de un método rápido multipolar. Una FFT aproximada basada en "wavelets", propuesta en los trabajos de (Guo y Burrus, 1996) usa las entradas / salidas dispersas (tiempo / frecuencia de localización), teniendo en cuenta de la manera más eficiente posible para un cálculo exacto de FFT. Otro algoritmo propuesto para el cálculo aproximado de un subconjunto de las salidas de DFT aparece en (Shentov et al., 1995).

El algoritmo TFE, específicamente, calcula la transformada rápida de Fourier (FFT) entre dos señales que interactúan con un sistema lineal invariante, asumiendo que una es la entrada al sistema y la otra la salida o respuesta ante la excitación, esta última contiene implícita la respuesta en frecuencia del sistema en los rangos de frecuencia donde se calcula la FFT, los argumentos definen los límites de cálculo para el algoritmo.

Este tiene una sintaxis reducida de la forma siguiente:

[Txy,f] = tfe(x,y,nfft,fs,numoverlap)

donde:

nfft especifica la longitud de ventana para la FFT. Este valor establece las frecuencias donde son estimados los espectros de potencia.

fs es un escalar que indica la frecuencia de muestreo usada.

Numoverlap define el número de muestras que se solapan en cada ventana seleccionada para la FFT. Si el vector X es real, el método estima la función de transferencia para valores positivos de frecuencia, en este caso el resultado es un vector de columna de longitud *nfft/2+1*. En el caso que X o Y sean valores complejos, la función de transferencia es estimada para ambos valores, positivos y negativos y Txy es entonces un vector de longitud *nfft*; la información detallada y el desarrollo del método matemático puede ser hallado en (MATLAB, 2009) y (Part-Enander et al, 1996).

Y la relación entre los vectores o señales X y Y está modelada por la función de transferencia Txy del tipo lineal invariante en el tiempo, con la peculiaridad que ambos vectores precisan tener la misma longitud para el cálculo de la FFT sin error.

3. Discusión y resultados

Concretamente en nuestro caso se diseñó un filtro de Butterworth de 8vo orden con una frecuencia de corte de 100 Hz, tratando de simular el comportamiento en frecuencia de un sismómetro. Paralelamente se generó, mediante instrucciones de MATLAB, una señal de ruido blanco normalizada con las siguientes características:

Fs=1000; Frecuencia

Ts=1/Fs; Período

Se asume, como señal X, la señal generada anteriormente y como Y, la salida del filtro de Butterworth, calculándose la FFT para un número de muestras igual a:

$$N_c = 10\,\frac{F_s}{F_c}H \tag{6}$$

Se aplica el algoritmo TFE para calcular la función de transferencia del filtro de forma directa es decir la relación entre la salida y la entrada, de forma inversa (entrada vs salida) y el recíproco de la respuesta directa (7):

$$G(f) = \frac{1}{H(f)} \tag{7}$$

donde $G(f)$ y $H(f)$ son las respuestas en frecuencia obtenidas de forma directa y recíproca respectivamente.

Las curvas de respuesta, entre los valores de 90 ~ 200 Hz no presentan incongruencias entre si, sino que tienen una caída de 20 dB por década de acuerdo al tipo de filtro simulado, por lo cual no existe inestabilidad en los valores, en frecuencia, de esas curvas. Estos pueden ser calculados determinándose el valor real de su atenuación para una frecuencia específica.

De cualquier modo, valores por encima de 90 Hz no son de interés para el monitoreo sísmico y solo tienen relevancia en registro acelerográficos donde se manifiestan señales con componentes espectrales a frecuencias superiores.

Por otra parte se observa que, a partir de 200 Hz, la solución que brinda el método se vuelve inestable y no existe coincidencia entre los valores de G(f) y la curva calculada por el método de forma inversa (curvas roja y negra en las figuras 1a y 1b), es decir, siendo desde el punto de vista matemático la misma variable calculada, por cuanto el cociente entre la entrada vs la salida debe resultar exacta al inverso del cociente que relaciona la salida vs la entrada, no existe coincidencia entre las curvas. Este efecto se acentúa en la medida que disminuye el valor de *nfft* como se observa en la figura 1b.

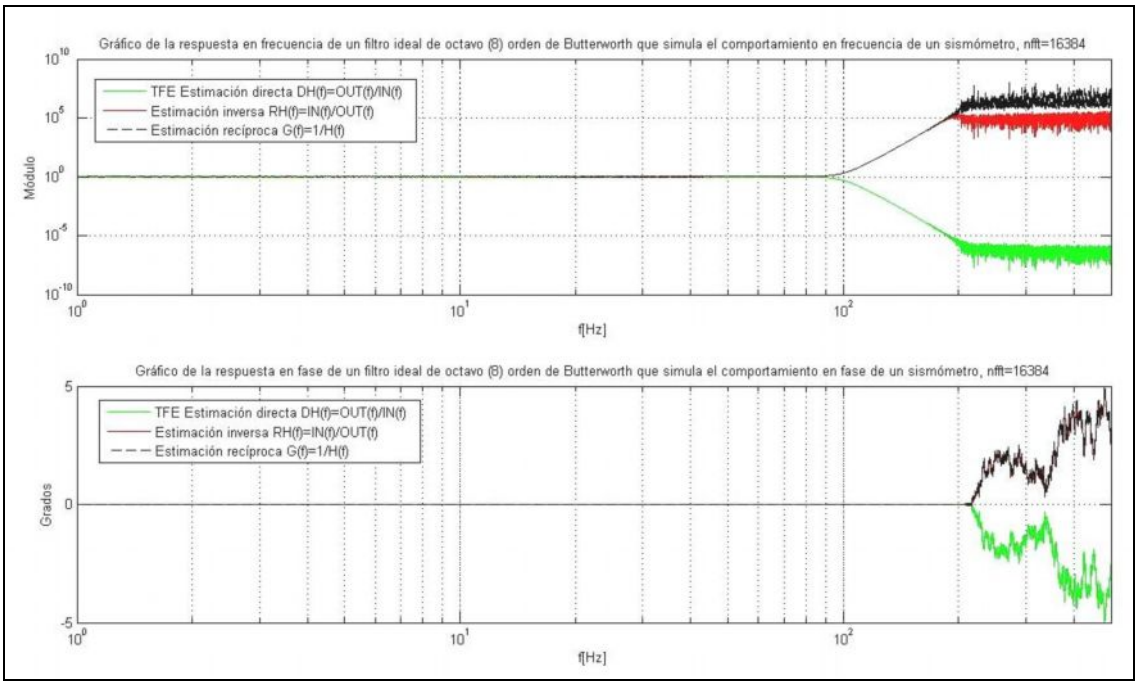


Fig. 1a. Gráfico de la respuesta en frecuencia de un filtro ideal de octavo (8) orden de Butterworth que simula el comportamiento en frecuencia de un sismómetro, se observan las tres curvas que corresponden, en verde, a la respuesta en frecuencia calculada de forma directa; en rojo la calculada de forma inversa y en líneas discontinuas el recíproco de la función de transferencia. La señal de entrada corresponde a un ruido blanco y las curvas corresponden a un cálculo realizado mediante el algoritmo TFE con un valor de nfft de 16384

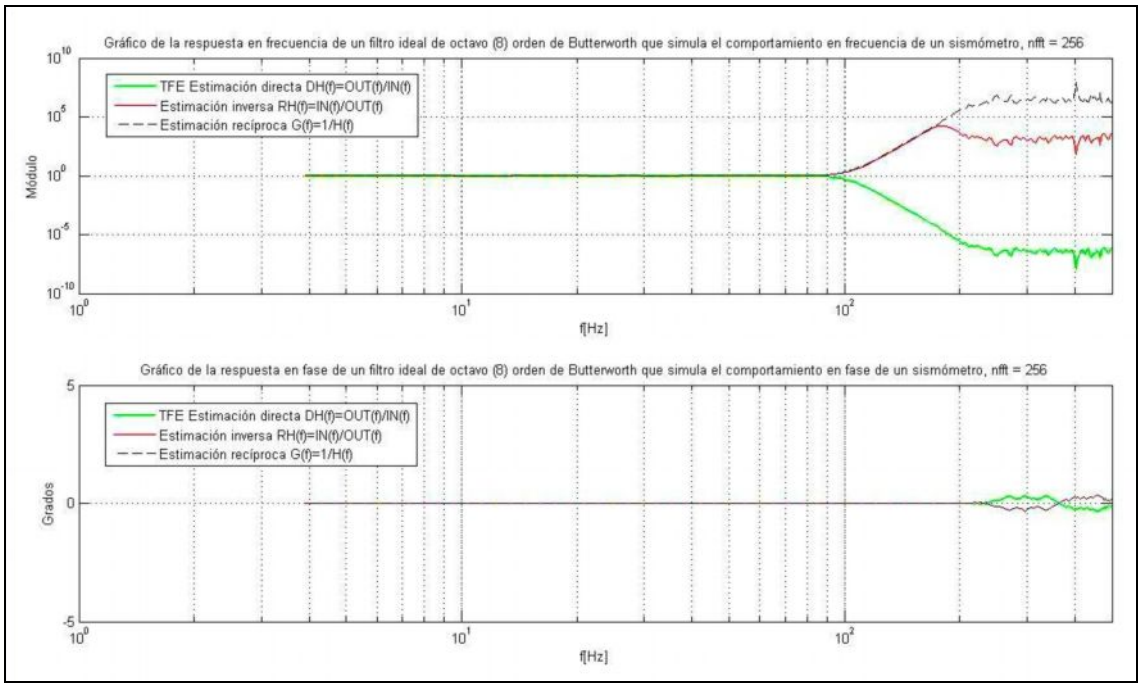


Fig. 1b. Gráfico de la respuesta en frecuencia de un filtro ideal de octavo (8) orden de Butterworth que simula el comprtamiento en frecuencia de un sismómetro, se observan las tres curvas que corresponden, en verde, a la respuesta en frecuencia calculada de forma directa; en rojo la calculada de forma inversa y en líneas discontinuas el recíproco de la función de transferencia. La señal de entrada corresponde a un ruido blanco y las curvas corresponden a un cálculo realizado mediante el algoritmo TFE con un valor de nfft de 256 (valor por defecto del algoritmo)

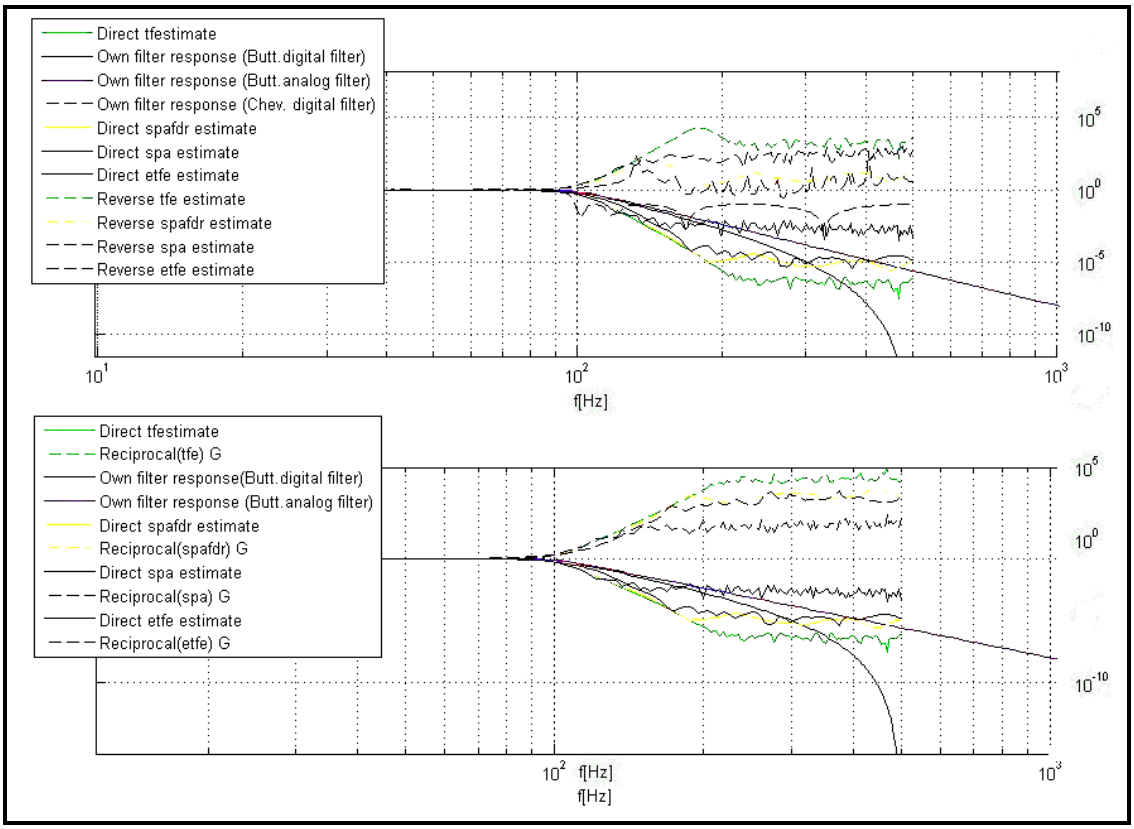


Fig. 2. Comparación entre tres métodos diferentes para la elaboración y el cálculo de la respuesta en frecuencia durante la evaluación del metodo TFE. Las gráfica muestran las curvas obtenidas mediante el uso de TFE, SPA y EFTE de forma directa, inversa y recíproca

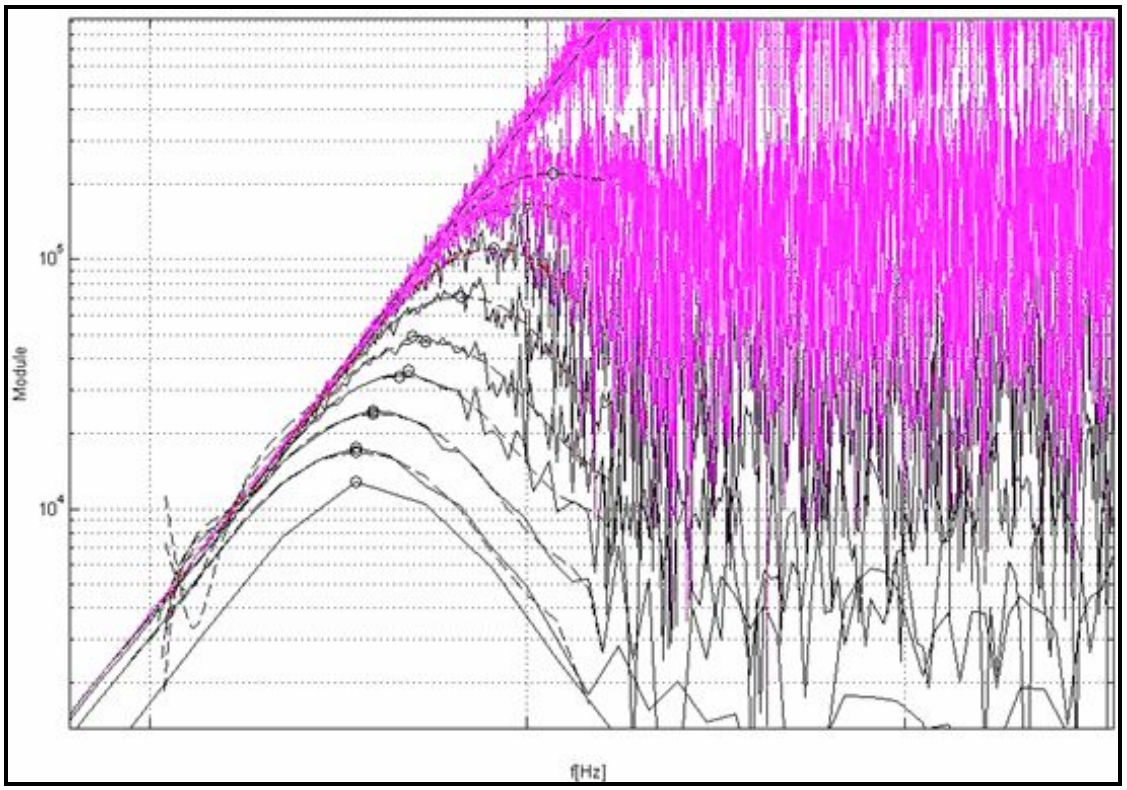


Fig. 3. Superposición de curvas obtenidas mediante el método TFE para diferentes valores de nfft con énfasis en los valores de frecuencia sobre os 150 Hz. Nfft= 16384, 8192, 4096, 2048, 1024, 512, 256

Por otra parte se evidencia el comportamiento no lineal de la curva obtenida de la solución del método, haciéndose necesario definir la tendencia matemática de crecimiento o decrecimiento de esta.

A fin de definir si la incongruencia entre los valores de G(f) y la respuesta en frecuencia directa es constante e identificar el origen de esta, se calcularon las curvas de respuesta mediante otros métodos del paquete de tratamiento de señales de Matlab, SPA (Spectral Analysis), SPAFDR (Spectral Analysis using frequency dependand resolution) y EFTE (Estimate empirical transfer functions and periodograms). En la figura 2 se muestran además las curvas del filtro analógico y digital de Butterworth y su similar de Chebishev, a modo de comparación.

Se observa en todos los métodos empleados que, más allá del valor de 200 Hz, las diferencias en linealidad con relación al valor de $G(f)$ se mantienen constantes independientemente del valor de la ventana nfft; concluyéndose que se trata de limitaciones inherentes a los modelos matemáticos usados en los paquetes de tratamiento de señales ofertados por Matlab e independientemente del método usado.

El tratamiento de la alinealidad de la curva obtenida aplicando el método TFE por encima de 150 Hz se estudia, a partir de retornar al método TFE y mediante el cálculo y sobre posición de las curvas resultantes para diferentes valores de nfft (Figura 3).

Los valores máximos obtenidos para cada curva muestran que a partir de 150 Hz se observa un crecimiento exponencial de los valores picos calculados para las diferentes curvas de respuesta en frecuencia. La expresión matemática que caracteriza el comportamiento se obtiene mediante la aplicación de un polinomio de grado 6 a partir del cual se obtiene los resultados numéricos. Los detalles matemáticos de este procedimiento pueden ser hallados en los paquetes de procesamiento de señales de MATLAB, (2009).

Conclusiones

Después de analizadas la confiabilidad y efectividad del algoritmo TFE actuando sobre un sistema hipotético, diseñado para simular el comportamiento de un sismómetro excitado mediante una señal aleatoria de ruido blanco, se pueden señalar los siguientes resultados:

- ✓ El método ó algoritmo TFE que forma parte del paquete de procesamiento de señales de MATLAB, es una herramienta útil para la determinación de la respuesta en frecuencia y fase de los sensores sísmicos, teniendo en cuenta que el ancho de banda de las señales que revisten interés para el calculo de la curva

de respuesta está acotada, en su parte superior, por valores de frecuencia que no exceden los 100 Hz, de manera que la alinealidad inherente al método que surge a partir de 150 Hz no influye sobre la exactitud de los valores durante el cálculo.

- ✓ El resultado no depende del número de ventanas usadas en el cálculo de la función TFE. Al menos en la zona de interés desde el punto de vista sísmico, la contribución derivada del aumento del número de ventanas usadas en el cálculo es irrelevante y solo presenta interés para la disminución del error intrínseco del algoritmo mediante el re-cálculo de este usando múltiples ventanas.
- ✓ La comparación con algoritmos similares del paquete de procesamiento de señales de MATLAB muestra que, para diferentes aproximaciones matemáticas al cálculo de la función de transferencia, no se observan variaciones significativas en los resultados en cuanto a linealidad en los valores de frecuencia específicos de las señales sísmicas.

Agradecimientos

A los colegas del departamento "Centro di Ricerche Seismologiche, (CRS)" perteneciente al "Istituto Nazionale de Oceanografia e di Geofisica Sperimentale" OGS con sede en Udine, Italia durante la preparación de este documento. Además el apoyo financiero recibido del Centro Internacional de Física Teórica (ICTP) mediante el programa TRIL (Programa de Entrenamiento en Laboratorios Italianos), a través de una beca de cuatro meses que permitió llevar a cabo esta investigación como parte del proyecto de doctorado.

Referencias

Cooley, J. W., Tukey, J. W. (1965). "An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series". Math. Comput. 19 (90): 297–301.

Edelman, A., McCorquodale, P. and Toledo, S. (1999). The Future Fast Fourier Transform?, SIAM J. Sci. Computing 20: 1094–1114.

Guo, H. and Burrus, C. S. (1996). Fast approximate Fourier transform via wavelets transform, Proc. SPIE Intl. Soc. Opt. Eng. 2825: 250–259.

MATLAB 2009b User's Guide (2009). The Math Works, Inc., Massachusetts.

Part-Enander, E., Sjoberg, A., Melin, B. and Isaksson, P. (1996). The MATLAB Handbook Addison-Wesley, New York.

Shentov, O. V., Mitra, S. K.; Heute, U.; Hossen, A. N. (1995). "Subband DFT. I. Definition, interpretations and extensions". Signal Processing 41 (3): 261–277.

Zuliani, D., Diez, E. y Ponton, F. VIBROCALC, seismometer frequency response elaboration software. Cienc. Tierra y Esp., 2012 / enero-junio / Vol. 13 No. 1 / pp. 15-23 ISSN 1729-3790